Développement : Formule sommatoire de Poisson - Application à la fonction de Jacobi

Analyse & Probabilités

Référence : [QUE] Queffélec H., Zuily C., *Analyse pour l'agrégation - Cours et exercices corrigés, 4ème* ***édition***, Dunod, 2013, p95.
Pour l'application : [GX] Gourdon X., *Les maths en tête - Analyse, 2ème* ***édition***, ellipses, 2008, p273.
Pour les leçons :
- 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.
- 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.
- 250 : Transformation de Fourier. Applications.

À mettre dans le plan en lemme :

Lemme 1. ***Transformée de*** Fourier ***de la gaussienne.***

Convention de la tranformation de Fourier : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} : \xi \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x$.

Soit $a > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$. Alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\gamma_{1/a}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Définition 1.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit sa *transformée de* Fourier $\hat{f}$ par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2p\pi x\xi}\mathrm{d}x.$$

(Cette définition permettra d'avoir une formule plus satisfaisante dans le théorème suivant, cf. remarque suivante.)

Théorème 2. ***Formule sommatoire de*** Poisson.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. On suppose que :

$$\exists M > 0 \quad \exists \alpha > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant \frac{M}{(1+|x|)^\alpha},$$

et que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$ converge. Alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n).$$

Preuve : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n).$$

⋆ Étape 1 : Montrons que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $A > 0$. Montrons que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur $[-A; A]$.
Pour $x \in [-A; A]$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geqslant 2A$, on a, par hypothèse :

$$|f(x+n)| \leqslant \frac{M}{(1+|x+n|)^\alpha},$$

avec $1 + |x+n| \geqslant |x+n| \geqslant |n| - |x| \geqslant |n| - A \geqslant \dfrac{|n|}{2}$. Donc :

$$|f(x+n)| \leqslant \frac{M}{\left(\frac{|n|}{2}\right)^\alpha} = \frac{2^\alpha M}{|n|^\alpha}.$$

Or, comme $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{2^\alpha M}{|n|^\alpha}$ converge, et elle ne dépend pas de x. Donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur $[-A;A]$, pour tout $A>0$.
F est donc bien définie sur $\mathbb{R}$, et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, F l'est également en tant que somme d'une série de fonctions continues qui converge uniformément sur tout segment de la forme $[-A;A]$, avec $A>0$.
⋆ <u>Étape 2 :</u> Montrons que F est 1-périodique sur $\mathbb{R}$. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F(x+1) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n+1) \\ &\overset{p=n+1}{=} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p) \\ &= F(x), \end{aligned}$$

et donc F est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.
⋆ <u>Étape 3 :</u> Calculons le coefficient de Fourier de F d'indice $m\in\mathbb{Z}$. On a[1] :

$$\begin{aligned} c_m(F) &= \int_0^1 F(t)e^{-2i\pi mt}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n)e^{-2i\pi mt}\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{CVN}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)e^{-2i\pi mt}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)e^{-2i\pi m(t+n)}\mathrm{d}t \\ &\overset{u=t+n}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u)e^{-2i\pi mu}\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi mu}\mathrm{d}u \\ &= \hat{f}(m). \end{aligned}$$

⋆ <u>Étape 4 :</u> Concluons.
Par l'Étape 3 et par hypothèse, $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m(F)| = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|$ converge. Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad F(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m(F)e^{2i\pi mx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m)e^{2i\pi mx},$$

i.e. :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m)e^{2i\pi mx},$$

ce qui achève la preuve en prenant $x=0$. □

Remarque 3.

[1] Si $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (espace de Schwartz), les hypothèses du théorème sont bien vérifiées, puisque f est à décroissante rapide, tout comme sa transformée de Fourier (qui est aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). La formule sommatoire de Poisson est donc appliquable à toute fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
[2] Dans le plan, j'ai pris la convention $\hat{f} : \xi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x$, ce qui alourdit un peu la formule sommatoire de Poisson. La preuve avec cette convention en reste cependant peu inchangée, et le résultat final est :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(2\pi n).$$

Vous conviendrez bien que la formule montrée plus haut est plus satisfaisante à lire !

[1] **Attention :** coquille dans le livre ! Dans l'intégrale, l'exponentielle n'a pas de $2i\pi$, alors qu'il faut le mettre. D'ailleurs, cela n'est pas oublié dans la formule dont les auteurs font référence, à la page 74.

Application 4. ***Application à la fonction de* Jacobi.**

Soit $\theta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Alors, θ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\theta\left(\frac{1}{x}\right).$$

<u>Preuve :</u> On se fixe $\alpha > 0$. Soit $f : x \longmapsto e^{-\alpha x^2}$. On a $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-2in\pi x} \mathrm{d}x \\
&\overset{u=2\pi x}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \frac{u^2}{4\pi^2}} e^{-inu} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{4\pi^2}x^2} e^{-inx} \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Lemme}}{=} \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\alpha}{4\pi^2}}} e^{-\frac{4\pi^2}{\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{4\pi^3}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

D'après la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n),$$

et donc :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}.$$

Soit $x > 0$. On prend $\alpha = \pi x$, ce qui donne :

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\pi x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\theta\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce qui achève la preuve. □

Remarque 5.

La fonction Θ de Jacobi est la fonction $\Theta : x \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{n^2}$, et :

$$\forall x > 0 \quad \theta(x) = \Theta(e^{-\pi x}).$$

Le corollaire précédent montre que :

$$\forall x > 0 \quad \Theta(e^{-\pi x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi}{x}},$$

ou encore, avec $\Theta(0) = 1$:

$$\forall y > 0 \quad \Theta(y) = \frac{1}{\sqrt{-\ln(y)}} e^{\frac{\pi}{\ln(y)}} \underset{y \to 1}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-y}},$$

grâce à un équivalent de $\ln(y) = \ln(1-(1-y))$, quand $1 - y \to 0$.